

光滑 Banach 空间中 Birkhoff 正交组的性质

王晓梅, 计东海

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:参考内积空间中正交组的定义,在有限维实 Banach 空间中引入了 Birkhoff 正交组的概念,并围绕光滑的 Banach 空间中是否存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组这一问题展开研究。证明了二维光滑的 Banach 空间中不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组;三维及以上的光滑 Banach 空间中不存在所含元素个数超过空间维数且所含元素均为左(右)对称点的 Birkhoff 正交组。表明了若 $n(\geq 3)$ 维光滑的 Banach 空间中存在 Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, 则 A 必不满足以下两个条件:(1)对 A 中任意一点 x_m 有 $x_m \perp_B x_i$ ($\forall i \neq m$);(2)对 A 中任意一点 x_m 有 $x_i \perp_B x_m$ ($\forall i \neq m$)。

关键词:Banach 空间;Birkhoff 正交;Birkhoff 正交组;光滑性

DOI:10.15938/j.jhust.2024.01.016

中图分类号: O177 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2024)01-0143-07

A Study of Birkhoff Orthogonal Sets in Smooth Banach Spaces

WANG Xiaomei, JI Donghai

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Referring to the definition of orthogonal set in inner product space, the concept of Birkhoff orthogonal set is introduced in finite-dimensional real Banach spaces, and the problem of whether there exists a Birkhoff orthogonal set whose number of elements exceeds the space dimension is studied in smooth Banach spaces. It is proved that there is no Birkhoff orthogonal set whose number of elements exceeds the space dimension in two-dimensional smooth Banach spaces. In a smooth Banach space with more than three dimensions, there is no Birkhoff orthogonal set with more elements than the space dimension and all the elements are left (right) symmetric points. It is also proved that if there is a Birkhoff orthogonal set $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ in an n -dimensional ($n \geq 3$) smooth Banach space, and then A must not satisfy the following two conditions: (1) for each $x_m \in A$, there exists $x_m \perp_B x_i$ ($\forall i \neq m$); (2) for each $x_m \in A$, there exists $x_i \perp_B x_m$ ($\forall i \neq m$).

Keywords: Banach space; Birkhoff orthogonality; Birkhoff orthogonal set; smoothness

0 引言

众所周知,正交性的存在使得内积空间具有许多重要的几何特征。随着赋范线性空间广义正交性的出现,将内积空间中的相关理论推广到一般赋范

线性空间,丰富赋范线性空间的几何知识成为可能。

Birkhoff 正交^[1]在 Banach 空间的几何研究中起着至关重要的作用。Birkhoff 正交与空间的各种几何性质(如光滑性、严格凸性等)之间有着自然地联系。Birkhoff 正交是许多中外学者一直以来的研究热点。

参考内积空间中正交组的定义,自然地可以给出实有限维 Banach 空间中 Birkhoff 正交组的定义。

在实有限维 Banach 空间中,若一组非零元素它们两两 Birkhoff 正交就称为 Birkhoff 正交组。本文的主要目的是对 Birkhoff 正交组进行研究。基于此,需要了解 Birkhoff 正交的一系列性质。

JAMES R C 详细研究了 Birkhoff 正交的相关性质^[2-3],他指出三维以上的实赋范空间中的 Birkhoff 正交如果是对称的,则该空间是内积空间;Birkhoff 正交具有齐次性;它不具有唯一性,一个空间中的 Birkhoff 正交是左唯一的当且仅当该空间是严格凸的;Birkhoff 正交是右唯一的或者是右可加的当且仅当该空间是光滑的。Birkhoff 正交相关性质的研究正在不断丰富^[4-11]。由于内积空间中的正交具有对称性而 Birkhoff 正交在一般赋范线性空间中不具有对称性,许多学者在 Birkhoff 正交对称性这一研究方向得出了许多结论^[12-18]。

2016 年,GHOSH P 等在文[12]中研究了有限维实 Hilbert 空间 H 上定义的线性算子为左(右) Birkhoff 正交对称充要条件。2017 年,SAIN D 在 Banach 空间中引入了 Birkhoff 正交意义下的左对称点和右对称点的概念^[13]。该论文还研究了有限维 Banach 空间 X 上定义的有界线性算子的 Birkhoff 正交性及满足 Birkhoff 正交性的对称线性算子。2017 年,SAIN D 等人研究了赋范线性空间 X 上的有界线性算子 T 的左对称性^[14]。2018 年,SAIN D 在文[15]中论证了对于一个实光滑的 Banach 空间,左对称点的集合在任何等距下都是不变集。近两年,CHATTOPADHYAY A 等在文[16]中完全刻画了实 Banach 空间 l_p^n ($1 \leq p \leq \infty$) 中 Birkhoff 正交意义下的左对称点和右对称点。SAIN D 在这之后全面地刻画了实 Banach 空间中的左对称点和右对称点^[17]。

Birkhoff 正交组与空间中的左对称点以及右对称点有着密切的联系,将左对称点和右对称点与 Birkhoff 正交组结合起来,有助于 Birkhoff 正交组性质的研究,也有助于丰富 Birkhoff 正交对称性的研究。

2021 年,ARAMBAŠIĆ L 等在文[18]中提出可交换 Birkhoff 正交的概念。设 X 是一个实有限维赋范线性空间, $x, y \in X$,称 x 与 y 为可交换 Birkhoff 正交的若 $x \perp_B y$ 且 $y \perp_B x$,记为 $x \perp \perp y$ 。根据可交换 Birkhoff 正交的定义,可以给出实有限维 Banach 空

间中可交换 Birkhoff 正交组的定义。在实有限维 Banach 空间中,若一组非零元素它们两两可交换 Birkhoff 正交就称为可交换 Birkhoff 正交组。显然,可交换 Birkhoff 正交组必为 Birkhoff 正交组,反之则不成立。例如在 l_∞^n 空间中,集合 $A = \{(1, 1, 0, \dots, 0), (1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0)\}$ 为空间中的 Birkhoff 正交组,但不是可交换 Birkhoff 正交组。

正如大众所知内积空间中的一组非零元素,如果它们两两正交就称为正交组。在 n ($n \in \mathbb{N}$) 维内积空间中两两正交的非零元素不能超过 n 个,即内积空间中不存在所含元素个数超过空间维数的正交组。ARAMBAŠIĆ L 等在文[18]中表明 n 维光滑赋范线性空间中至多有 n 个两两可交换 Birkhoff 正交的非零元素。这表明 n 维光滑的 Banach 空间中不存在所含元素个数超过空间维数的可交换 Birkhoff 正交组。由于空间中可交换 Birkhoff 正交组不一定是 Birkhoff 正交组,故这一性质不一定能应用到 Birkhoff 正交组上。本文将重点围绕 n ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) 维光滑的 Banach 空间中能否存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组展开研究。

1 预备知识

定义 1^[1] 设 X 是一个实赋范线性空间, $x, y \in X$,如果对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都有

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

则称 x Birkhoff 正交于 y 记作 $x \perp_B y$,称 y 为 x 的 Birkhoff 正交元。

显然,若 $x \perp_B y$ 且 x 和 y 都是非零元素时, x 与 y 是线性无关的。

定义 2 设 X 是一个实有限维 Banach 空间, $A \subset X$ 为所含元素均为非零元素的集合。若对 $\forall x, y \in A$ ($x \neq y$),有 $x \perp_B y$ 或 $y \perp_B x$ 。则称 A 为 Birkhoff 正交组。

定义 3^[13] 设 X 是一个实有限维 Banach 空间,元素 $x \in X$ 称为左对称点若

$$x \perp_B y \Rightarrow y \perp_B x$$

对所有的 $y \in X$ 成立。

元素 $x \in X$ 称为右对称点若

$$y \perp_B x \Rightarrow x \perp_B y$$

对所有的 $y \in X$ 成立。

若元素 $x \in X$ 既为左对称点又为右对称点,则

称该元素为对称点。

定义 4^[19] 设 X 为赋范线性空间, $x \in X$, 称 $f \in X^*$ 为 x 点处的支撑泛函, 若 $f(x) = \|x\|$ 。

定义 5^[2] 赋范线性空间 X 上的 Birkhoff 正交是右可加的是指: 对 $x, y, z \in X$, 若 $x \perp_B y$ 且 $x \perp_B z$, 则有 $x \perp_B y + z$ 。

定理 1^[3] 设 X 为光滑的赋范线性空间, 对 $\forall x \in S_X$ 都存在唯一的支撑泛函 $f \in S_{X^*}$ 。

定理 2^[3] 设 X 为赋范线性空间, 则 X 上的 Birkhoff 正交是右可加的当且仅当 X 是光滑的。

此外, 本文中出现的符号表示含义如表 1 所示。

表 1 符号说明

Tab. 1 Symbol Descriptions

符号	说明
$\mathbb{R}$	全体实数集合
N	全体自然数集合
S_X	空间 X 的单位球面
B_X	空间 X 的单位球
$X^\#$	空间 X 上线性泛函的全体
X^*	空间 X 上有界线性泛函的全体
$\ker f$	函数 f 的核空间, 用数学符号表示为 $\ker f = \{x \in \text{空间 } X: f(x) = 0\}$

2 主要结果

首先, 从二维空间开始研究, 证明二维光滑的 Banach 空间中不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组。

引理 1^[3] 设 X 是一个实有限维赋范线性空间, $x, y \in X$ 。 $x \perp_B y$ 的充要条件是存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x) = \|x\|$ 且 $f(y) = 0$ 。

定理 3 设 X 是一个光滑的实有限维 Banach 空间且 $\dim X = 2$ 。则空间 X 中不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组。

证明: 反证法, 假设 $A = (x_1, x_2, x_3)$ 为空间 X 中的 Birkhoff 正交组。由于空间 X 是光滑的, 故 A 中任一元素 x_m 均存在唯一的支撑泛函 $f_m \in X^*$ 。设 x_1, x_2, x_3 对应的支撑泛函分别为 f_1, f_2, f_3 。

当 $x_2 \perp_B x_1$ 和 $x_3 \perp_B x_1$ 在空间 X 中同时存在时: 由引理 1 可得

$$x_2 \perp_B x_1, x_3 \perp_B x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 \in \ker f_2, x_1 \in \ker f_3 \Rightarrow$$

$$x_1 \in \ker f_2 \cap \ker f_3$$

由 Birkhoff 正交组的定义可知, 当 $x_2 \perp_B x_1$ 和 $x_3 \perp_B x_1$ 同时存在时, 此时必有 $x_2 \perp_B x_3$ 或 $x_3 \perp_B x_2$ 。即必有 $x_2 \in \ker f_3$ 或 $x_3 \in \ker f_2$ 。

若 $\ker f_2 = \ker f_3$, 则有 $x_2 \in \ker f_2$ 即 $x_2 \perp_B x_2$ 。然而 $x_2 \not\perp_B x_2$, 矛盾。故 $\ker f_2 \neq \ker f_3$ 。又由 $\dim X = \dim X^* = 2$, 故

$$\dim(\ker f_2) = \dim(\ker f_3) = 1$$

则有

$$x_1 \in \ker f_2 \cap \ker f_3 = \{0\}$$

然而 $x_1 \neq 0$, 矛盾。故 $x_2 \perp_B x_1$ 和 $x_3 \perp_B x_1$ 在空间 X 中不能同时存在。

同理可得 $x_1 \perp_B x_2$ 和 $x_3 \perp_B x_2$ 在空间 X 中不能同时存在; $x_1 \perp_B x_3$ 和 $x_2 \perp_B x_3$ 在空间 X 中不能同时存在。

此时 Birkhoff 正交组 $A = (x_1, x_2, x_3)$ 在空间 X 中只能有以下两种可能的 Birkhoff 正交情况:

$$1) x_1 \perp_B x_3, x_3 \perp_B x_2, x_2 \perp_B x_1;$$

$$2) x_1 \perp_B x_2, x_2 \perp_B x_3, x_3 \perp_B x_1。$$

考虑情况(1):

由 Birkhoff 正交的性质可知此时 x_1 和 x_3 是线性无关的; x_3 和 x_2 是线性无关的; x_2 和 x_1 是线性无关的。又因为 $\dim X = 2$, 故 $A = (x_1, x_2, x_3)$ 在空间 X 中是线性相关的。则此时有

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 (a_1 a_2 a_3 \neq 0)。$$

由 Birkhoff 正交的齐次性可得

$$x_1 \perp_B x_3 \Rightarrow a_1 x_1 \perp_B a_3 x_3 \Rightarrow$$

$$-a_2 x_2 - a_3 x_3 \perp_B a_3 x_3 \Leftrightarrow$$

$$\|a_2 x_2 + (\lambda + 1) a_3 x_3\| \geq \|a_2 x_2 + a_3 x_3\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x_3 \perp_B x_2 \Rightarrow a_3 x_3 \perp_B a_2 x_2 \Leftrightarrow$$

$$\|a_3 x_3 + \lambda a_2 x_2\| \geq \|a_3 x_3\|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \xRightarrow{\lambda=1}$$

$$\|a_3 x_3 + a_2 x_2\| \geq \|a_3 x_3\|$$

$$x_2 \perp_B x_1 \Rightarrow a_2 x_2 \perp_B a_1 x_1 \Rightarrow$$

$$a_2 x_2 \perp_B -a_2 x_2 - a_3 x_3 \Leftrightarrow$$

$$\|a_2 x_2 + \lambda(-a_2 x_2 - a_3 x_3)\| \geq \|a_2 x_2\|,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \xRightarrow{\lambda=1} \|a_3 x_3\| \geq \|a_2 x_2\|$$

故

$$x_1 \perp_B x_3, x_3 \perp_B x_2, x_2 \perp_B x_1 \Rightarrow$$

$$\|a_2 x_2 + (\lambda + 1) a_3 x_3\| \geq$$

$$\|a_2x_2 + a_3x_3\| \geq \|a_3x_3\| \geq \|a_2x_2\|,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_2 \perp_B x_3$$

然而,由上述可知 $x_1 \perp_B x_3$ 和 $x_2 \perp_B x_3$ 在空间 X 中不能同时存在,矛盾。

同理考虑情况(2)可得

$$x_1 \perp_B x_2, x_2 \perp_B x_3, x_3 \perp_B x_1 \Rightarrow x_3 \perp_B x_2$$

由于 $x_1 \perp_B x_2$ 和 $x_3 \perp_B x_2$ 在空间 X 中不能同时存在,矛盾。

综上所述,可知空间 X 中不存在 Birkhoff 正交组 $A = (x_1, x_2, x_3)$ 。

若空间 X 中存在 Birkhoff 正交组

$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, 则必存在 S 的子集

$A = (x_1, x_2, x_3)$ 为空间 X 的 Birkhoff 正交组,矛盾。

同理,以此类推可以证得空间 X 中不存在超过空间维数的 Birkhoff 正交组,证毕。

由于所含元素个数为二的 Birkhoff 正交组必为线性无关组,故由定理3可得出如下结论。

推论1 设 X 是一个光滑的实有限维 Banach 空间且 $\dim X = 2$ 。则空间 X 中的 Birkhoff 正交组为线性无关组。

接下来研究光滑的实有限维 Banach 空间 X ($\dim X \geq 3$) 中是否存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组。

既然二维光滑的 Banach 空间不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组,那么自然地猜想光滑的 Banach 空间 X ($\dim X \geq 3$) 中也不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组。

为了验证这一猜想,先研究一些具有特殊性质的 Birkhoff 正交组是否符合这个猜想。

设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为光滑的实有限维 Banach 空间 X ($\dim X \geq 3$) 中的 Birkhoff 正交组,且满足条件: A 中的元素均为左(右)对称点。接下来证明 Birkhoff 正交组 A 在空间 X 中所含元素个数必不超过空间维数。

定理4 设 X 是一个光滑的实有限维 Banach 空间且 $\dim X \geq 3$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为空间 X 中的 Birkhoff 正交组且满足条件: A 中的元素均为左(右)对称点。则 Birkhoff 正交组 A 为线性无关组。

证明:由 Birkhoff 正交组定义可知对于 A 中的任意两元素 x, y , 一定有 $x \perp_B y$ 或 $y \perp_B x$ 。

故当 A 中的元素均为左(右)对称点时, A 必满足条件: $x_1 \perp_B x_j$ ($j = 2, \dots, n$), $x_2 \perp_B x_m$ ($m = 3, \dots,$

$$n), \dots, x_{n-1} \perp_B x_n。$$

由于空间 X 是光滑的,故 A 中任一点均为空间 X 中的光滑点。因此 A 中任一元素 x_m 均存在唯一的支撑泛函 $f_m \in X^*$ 。

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 对应的支撑泛函分别为 $f_1, f_2, \dots, f_n$, 由引理1可知

$$x_1 \perp_B x_j (j = 2, \dots, n) \Rightarrow x_2, x_3, \dots, x_n \in \ker f_1,$$

$$x_2 \perp_B x_m (m = 3, \dots, n) \Rightarrow x_3, \dots, x_n \in \ker f_2,$$

...

$$x_{n-1} \perp_B x_n \Rightarrow x_n \in \ker f_{n-1}。$$

$$\text{令 } \sum_{j=1}^n c_j x_j = 0 \text{ 则有}$$

$$c_1 x_1 = -c_2 x_2 - c_3 x_3 - \dots - c_n x_n$$

又因为 $x_2, x_3, \dots, x_n \in \ker f_1$ 则有

$$f_1(c_1 x_1) = f_1(-c_2 x_2 - c_3 x_3 - \dots - c_n x_n) = 0$$

即

$$c_1 f_1(x_1) = -c_2 f_1(x_2) - c_3 f_1(x_3) - \dots - c_n f_1(x_n) = 0$$

因 $f_1(x_1) = \|x_1\| \neq 0$, 故有 $c_1 = 0$ 。

同理,由 $x_3, \dots, x_n \in \ker f_2$ 以及 $f_2(x_2) = \|x_2\| \neq 0$ 可得 $c_2 = 0$ 。

以此类推可得 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, 故 A 为线性无关组,证毕。

推论2 设 X 是一个光滑的实有限维 Banach 空间且 $\dim X \geq 3$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为空间 X 中的 Birkhoff 正交组且满足条件: A 中的元素均为左(右)对称点。则 A 在空间 X 中所含元素个数必不超过空间维数。

受定理4的启发,用 Birkhoff 正交的左(右)对称点对内积空间进行刻画。

定理5 设 X 为实赋范线性空间且 $\dim X \geq 3$ 。空间 X 为内积空间的充要条件为 S_X 上的点均为左(右)对称点。

证明:首先证明空间 X 为内积空间的充要条件为 S_X 上的点均为左对称点。

$\Rightarrow$ 因为内积空间中的 Birkhoff 正交具有对称性,故当空间 X 为内积空间时, S_X 上的点均为对称点,故均为左对称点。

$\Leftarrow$ 当 S_X 上的点均为左对称点时,对 $\forall u, v \in S_X$,

$$u \perp_B v \Rightarrow v \perp_B u$$

同理

$$v \perp_B u \Rightarrow u \perp_B v$$

即

$$u \perp_B v \Leftrightarrow v \perp_B u$$

根据 Birkhoff 正交的齐次性可得此时空间 X 中的 Birkhoff 正交具有对称性。由 JAMES R C 的结论可知空间中的 Birkhoff 正交具有对称性当且仅当该空间是内积空间。因此空间 X 为内积空间。

同理可以证明空间 X 为内积空间的充要条件为 S_X 上的点均为右对称点,证毕。

要研究光滑的 Banach 空间 $X(\dim X \geq 3)$ 中是否真的不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组这一复杂问题,可以先进行逆向思维。假设空间 X 中存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组,探究此时这些 Birkhoff 正交组需要满足什么条件。

在此之前需要用到文[20]中的一个结论。

引理 2^[20] 设 X 为向量空间, $\{f, f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset X^\#$ 。 f 为 $f_1, \dots, f_n$ 的线性组合当且仅当 $\bigcap_{j=1}^n \ker f_j \subset \ker f$ 。

定理 6 设 X 是一个光滑的实有限维 Banach 空间且 $\dim X \geq 3$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为空间 X 中的 Birkhoff 正交组,对 $\forall x_i \in A (i = 1, 2, \dots, n)$ 有唯一的支撑泛函 f_i 。若 A 中存在元素 x_m 满足其对应支撑泛函 f_m 为 $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots, f_n$ 的线性组合,则必不存在对 $\forall j \neq m$ 有 $x_j \perp_B x_m$ 成立。

证明:反证法,假设空间 X 中的 Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中存在一点 x_m 满足其对应支撑泛函 f_m 为 $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots, f_n$ 的线性组合且满足对 $\forall j = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, n$ 有 $x_j \perp_B x_m$ 成立。

由引理 1 可知

$$x_j \perp_B x_m (j = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, n) \Rightarrow$$

$$x_m \in \bigcap_{j=1}^{1, \dots, m-1, m+1, \dots, n} \ker f_j$$

再由引理 2 可知 f_m 为 $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}, \dots, f_n$ 的线性组合可以推出

$$\bigcap_{j=1}^{1, \dots, m-1, m+1, \dots, n} \ker f_j \subset \ker f_m$$

故有 $x_m \in \ker f_m$ 即有 $x_m \perp_B x_m$, 矛盾。证毕。

定理 7 设 $n \in \mathbb{N}$, X 为 $n (\geq 3)$ 维光滑的实 Banach 空间, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ 为空间 X 中的 Birkhoff 正交组。则 A 必不满足以下这两种情况:

- 1) 对 A 中任意一点 x_m 有 $x_m \perp_B x_i (\forall i \neq m)$;
- 2) 对 A 中任意一点 x_m 有 $x_i \perp_B x_m (\forall i \neq m)$ 。

证明:考虑情况(1):要证该定理即证在空间 X

中, A 中存在元素不满足该元素 Birkhoff 正交于 A 中其余所有元素的条件。同时可以证得这样的元素至少有四个。

首先由定理 3 的证明过程可知光滑的实 Banach 空间中所含元素个数为 3 的 Birkhoff 正交组必为线性无关组。因此,在光滑的实 Banach 空间中当所含元素个数为 4 的 Birkhoff 正交组为线性相关组时,该正交组中任一元素均可由其余元素线性表出。故当 $n = 3$ 时, Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 中任一元素均可由其余元素线性表出。

当 $n = 4$ 时, Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 必定为线性相关的,此时有 $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 0$, 其中 a, b, c, d, e 不全为 0。若 a, b, c, d, e 均不为 0, 则有五个元素满足可被除该元素本身外的 A 中其余元素线性表出的条件。若 a, b, c, d, e 中有一个元素为 0, 不妨设 $a = 0$ 且 $bcd \neq 0$ 此时必有四个元素满足可被除该元素本身外的 A 中其余元素线性表出的条件。若 a, b, c, d, e 中有两个元素为 0, 由定理 3 的证明过程可知这种情况不存在。同理也不存在 a, b, c, d, e 中有 3 个元素为 0 或者 4 个元素为 0 的情况。即当 $n = 4$ 时 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 中必定存在 4 个元素满足可被除该元素本身外的 A 中其余元素线性表出的条件。

以此类推可以知道在 $n (\geq 3)$ 维光滑的实赋范线性空间中 Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ 至少存在 4 个元素满足可被除该元素本身外的 A 中其余元素线性表出的条件。

下证若 A 中某一元素 x_m 满足可被除该元素本身外的 A 中其余元素线性表出的条件则该元素必不满足 x_m Birkhoff 正交于 A 中其余所有元素的条件。

若元素 x_m 满足 x_m Birkhoff 正交于 A 中其余所有元素的条件,根据 Birkhoff 正交的齐次性和光滑赋范线性空间中 Birkhoff 正交的右可加性可得

$$x_m \perp_B a_1 x_1 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + a_{m+1} x_{m+1} + \dots + a_{n+1} x_{n+1}$$

即 $x_m \perp_B x_m$, 由上述可知矛盾。

故在空间 X 中, A 中存在元素不满足该元素 Birkhoff 正交于 A 中其余所有元素的条件,且这样的元素至少有 4 个。

考虑情况(2):

要证这个定理即证 A 中存在一点 x_m 不满足 A

中其余所有元素均 Birkhoff 正交于 x_m 的条件。

由于空间 X 为 n 维光滑的,故 A 为线性相关的且 A 中任意一元素 x_m 均存在唯一的支撑泛函 $f_m \in X^*$ 。

设 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ 对应的支撑泛函分别为 $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ 。由于 $\dim X = \dim X^*$, 故 $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}\}$ 在空间 X^* 中是线性相关的,那么 S 中必定存在元素 f_m 满足可被其余元素线性表出的条件。可知该元素 $f_m \in S$ 为 $x_m \in A$ 的支撑泛函,而元素 $x_m \in A$ 即为我们要找的元素 x_m 。

由定理 6 可知此时 x_m 不满足 A 中其余所有元素均 Birkhoff 正交于 x_m 的条件。故在空间 X 中, A 中存在元素不满足 A 中其余所有元素均 Birkhoff 正交于该元素的条件,证毕。

由定理 4 可知所含元素均为左(右)对称点的 Birkhoff 正交组在光滑的 Banach 空间中必为线性无关组。那么 $n(\geq 3)$ 维光滑的 Banach 空间中若存在 Birkhoff 正交组 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, 则 A 中元素不全为左对称点或不全为右对称点。

接下来,进一步证明在 $n(\geq 3)$ 维光滑的 Banach 空间 X 中, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ 必不由一个左对称点和 n 个右对称点构成。

定理 8 设 $n \in \mathbb{N}$, X 为 $n(\geq 3)$ 维光滑的实赋范线性空间, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ 为空间 X 中 Birkhoff 正交组。则 A 必不由一个左对称点和 n 个右对称点构成。

证明:反证法,不妨设 x_{n+1} 为空间 X 中的左对称点, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均为右对称点。

当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均为右对称点时,由定理 4 的证明过程可知此时必然有 $x_1 \perp_B x_j (j = 2, \dots, n)$, $x_2 \perp_B x_m (m = 3, \dots, n), \dots, x_{n-1} \perp_B x_n$ 。

而当 x_{n+1} 为左对称点时,由 Birkhoff 正交组的定义可知此时必然有

$$x_1, x_2, \dots, x_n \perp_B x_{n+1}$$

由于空间 X 是光滑的,故 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别存在唯一的支撑泛函 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 。此时由 $\dim X = n$ 和引理 1 可知

$$x_1, x_2, \dots, x_n \perp_B x_{n+1} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} \in \ker f_1 \cap \ker f_2 \cap \ker f_3 \cap \dots \cap \ker f_n = \{0\}$$

然而由 Birkhoff 正交组定义可知 $x_{n+1} \neq 0$, 矛盾,证毕。

注:上述定理的结论不能更换成:则 A 必不由

一个右对称点和 n 个左对称点构成。因为当 A 满足这个条件时,不一定能得出这 n 个左对称点均 Birkhoff 正交于这个右对称点的结果。故基于上述证明过程,不能找出矛盾点。

3 结 论

针对光滑的 Banach 空间中是否存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组这一问题,我们已经在二维空间中找到答案。对于三维及以上的空间中是否也具有这样的性质,我们通过逆向思维得出了一些有助于解决这一复杂问题的有用结论,如定理 7 以及定理 8 所示。

基于目前的研究我们猜测三维及以上的光滑 Banach 空间中不存在所含元素个数超过空间维数的 Birkhoff 正交组。

我们将在后续继续研究并验证我们的猜想,解决这一复杂问题。

参 考 文 献:

- [1] BIRKHOFF G. Orthogonality in Linear Metric Spaces [J]. Duke Mathematical Journal, 1935, 1(2): 169.
- [2] JAMES R C. Inner Products in Normed Linear Spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, 1947, 53(6): 559.
- [3] JAMES R C. Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1947, 61(2): 265.
- [4] ARAMBAŠIĆ L, RAJIC R. On Symmetry of the (Strong) Birkhoff-James Orthogonality in Hilbert C*-Modules[J]. Annals of Functional Analysis, 2016, 7(1): 17.
- [5] SAIN D, PAUL K, MAL A. On Approximate Birkhoff-James Orthogonality and Normal Cones in a Normed Space [J]. Journal of Convex Analysis, 2019, 26(1): 341.
- [6] ZAMANI A. Birkhoff-James Orthogonality of Operators in Semi-Hilbertian Spaces and Its Applications[J]. Annals of Functional Analysis, 2019, 10(3): 433.
- [7] ALONSO J, MARTINI H, WU S L. On Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Aequationes Mathematicae, 2012, 83(1): 153.
- [8] JI D H, WU S L. Quantitative Characterization of the

- Difference Between Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(1): 1.
- [9] 吴森林, 计东海. 正交性和内积空间的一些特征[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2004, 9(6): 113.
WU Senlin, JI Donghai. Orthogonalities and Some Characterizations of Inner Product Spaces[J]. Journal of Harbin University of Science & Technology, 2004, 9(6): 113.
- [10] 吴森林, 计东海. 正交性相关问题的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2006.
- [11] 杨冲, 张登华. Banach 空间中 Birkhoff 正交性的刻画[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(9): 187.
YANG Chong, ZHANG Denghua. Characterizations of Birkhoff Orthogonality in Banach Space[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(9): 187.
- [12] GHOSH P, SAIN D, PAUL K. Orthogonality of Bounded Linear Operators[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2016, 500: 43.
- [13] SAIN D. Birkhoff-James Orthogonality of Linear Operators on Finite-dimensional Banach Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2017, 447(2): 860.
- [14] SAIN D, GHOSH P, PAUL K. On Symmetry of Birkhoff-James Orthogonality of Linear Operators on Finite-dimensional Real Banach Spaces[J]. Operators and Matrices, 2017, 11(4): 1087.
- [15] SAIN D. On the Norm Attainment Set of a Bounded Linear Operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 457(1): 67.
- [16] CHATTOPADHYAY A, SAIN D, SENAPATI T. Characterization of Symmetric Points in l_pn-spaces[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2021, 69(16): 2998.
- [17] SAIN D, ROY S, BAGCHI S, ET AL. A Study of Symmetric Points in Banach Spaces[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(5): 888.
- [18] ARAMBAŠIĆ L, GUTERMAN A, KUZMA B, ET AL. Symmetrized Birkhoff-James Orthogonality in Arbitrary Normed Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021, 502(1): 125203.
- [19] 定光桂. 巴拿赫空间引论(第2版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 2.
- [20] MEGGINSON R E. An Introduction to Banach Space Theory[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- (编辑: 温泽宇)